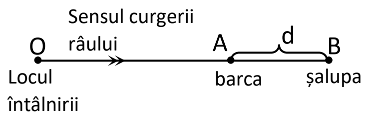
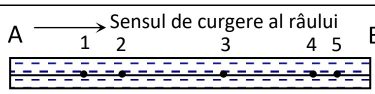
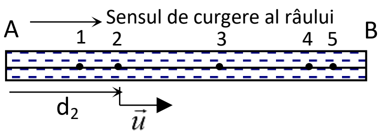
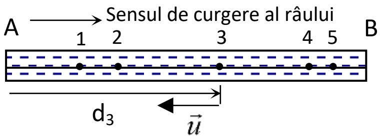
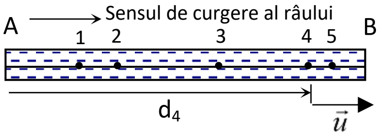
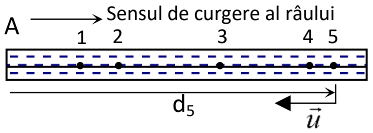
<table>
<tr><th colspan="2">Barem Subiectul I. Șalupe, barcă și plută ... pe râu</th><th>Parțial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td rowspan="6">a.</td><td>În intervalul de timp t_2 barca se întoarce în localitatea A numai datorită curgerii râului. Rezultă că, la început, în timpul t_1 ea s-a deplasat împotriva curentului. Deoarece pentru șalupă timpul t_2 al întoarcerii este inferior timpului t_1 al „ducerii” rezultă că și șalupa a mers inițial contra-curentului. Situația este cea din fig. alăturată.

</td><td>2p</td><td rowspan="6">10p</td></tr>
<tr><td>Notăm $AO \equiv x$ și putem scrie $x = (v_b - v_r)t_1 = v_r t_2$, respectiv $d + x = (v_s - v_r)t_1 = (v_s + v_r)t_2$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$v_b = v_r \dfrac{t_1 + t_2}{t_1}$, $v_s = v_r \dfrac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2}$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$v_r = \dfrac{d(t_1 - t_2)}{t_2(t_1 + t_2)} = 4\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$v_b = \dfrac{d(t_1 - t_2)}{t_1 t_2} = \dfrac{20}{3}\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$,</td><td>1p</td></tr>
<tr><td>$v_s = \dfrac{d}{t_2} = 20\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.</td><td>1p</td></tr>
<tr><td rowspan="5">b.</td><td>Pluta parcurge distanța d în timpul $t_p = \dfrac{d}{v} = 15\,\text{h}$
Șalupa parcurge distanța dintre B și A în timpul $t_{BA} = \dfrac{d}{u - v} = 3{,}75\,\text{h}$, iar
de la A la B în timpul $t_{AB} = \dfrac{d}{u + v} = 2{,}5\,\text{h}$</td><td>0,5p
0,5p
0,5p</td><td rowspan="5">12p</td></tr>
<tr><td>$2(t_{BA} + t_{AB}) < t_p$ iar $3(t_{BA} + t_{AB}) > t_p$,
rezultă că vor fi $n = 5$ întâlniri

</td><td>0,5p</td></tr>
<tr><td>Prima întâlnire: $d_1 = vt_1$, $d = vt_1 + (u - v)t_1 = ut_1$
$t_1 = \dfrac{d}{u}$, $d_1 = v \cdot \dfrac{d}{u}$, $d_1 = 12\,\text{km}$</td><td>1p
1p</td></tr>
<tr><td>A 2-a întâlnire: $d_2 = vt_2 = (u + v)(t_2 - t_{BA})$,
$t_2 u = t_{BA}(u + v) \Leftrightarrow \dfrac{d_2}{v} u = \dfrac{d(u + v)}{u - v}$
$d_2 = \dfrac{v(u + v)d}{u(u - v)}$, $d_2 = 18\,\text{km}$

</td><td>0,25p
1p
0,75p</td></tr>
<tr><td>A 3-a întâlnire $d_3 = vt_3$, $t_3 = \dfrac{d_3}{v}$
$d = vt_3 + [t_3 - (t_{BA} + t_{AB})](u - v)$
$d + (t_{BA} + t_{AB})(u - v) = \dfrac{d_3}{v} u$

</td><td>0,25p
0,5p
0,25</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$d_3 = \dfrac{vd + v(u-v)(t_{BA}+t_{AB})}{u}$	0,25	
	$d_3 = \dfrac{v(3u+v)d}{u(u+v)}$, $d_3 = 32\,\text{km}$	0,75p	
	A 4-a întâlnire $d_4 = vt_4$, $t_4 = \dfrac{d_4}{v}$ 	0,25p	
	$d_4 = vt_4 = \left[t_4 - (2t_{BA}+t_{AB})\right](u+v)$	0,5p	
	$u\dfrac{d_4}{v} = (2t_{BA}+t_{AB})(u+v)$	0,25p	
	$d_4 = \dfrac{v(u+v)(2t_{BA}+t_{AB})}{u}$	0,25p	
	$d_4 = \dfrac{v(3u+v)d}{u(u-v)}$, $d_4 = 48\,\text{km}$	0,75p	
	A 5-a întâlnire $d_5 = vt_5$, $t_3 = \dfrac{d_5}{v}$ 	0,25p	
	$d = vt_5 + \left[t_5 - 2(t_{BA}+t_{AB})\right](u-v)$	0,5p	
	$d + 2(t_{BA}+t_{AB})(u-v) = \dfrac{d_5}{v}u$		
	$d_5 = \dfrac{vd + 2v(u-v)(t_{BA}+t_{AB})}{u}$	0,5p	
	$d_5 = \dfrac{v(5u+v)d}{u(u+v)}$, $d_5 = 52\,\text{km}$	0,75p	
c.1	Râul curge de la *B* spre *C*. Viteza primei șalupe față de maluri este 3v, iar viteza inițială a celei de-a doua șalupe este v (o duce apa). Fie τ timpul de mers până la jumătatea drumului când șalupa 2 o depășește pe prima	1p	**3p**
	$\frac{1}{2}D = 3v\tau = v\tau + \frac{a}{2}\tau^2$.	1p	
	$\tau = \dfrac{4v}{a}$, $D = 6v\tau = \dfrac{24v^2}{a}$.	1p	
c.2	Prima șalupă a ajuns în *C* în timpul $\tau_{11} = 2\tau = \dfrac{8v}{a}$. La întoarcerea din *C* această șalupă, față de maluri, are viteza inițială v și accelerația a.	0,5p	**5p**
	Timpul parcurgerii drumului CB se determină din relația $D = v\tau_{12} + \frac{a}{2}\tau_{12}^2$.	0,5p	
	obținem ecuația $\tau_{12}^2 + \dfrac{2v}{a}\tau_{12} - \dfrac{48v^2}{a^2} = 0$	0,5p	
	cu soluția fizică $\tau_{12} = \dfrac{6v}{a}$.	0,5p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	Timpul în care prima șalupă face distanța 2*D* este $t_1 = \tau_{11} + \tau_{12} = 14\dfrac{\mathrm{v}}{a}$.	0,5p	
	Deoarece a doua șalupă s-a mișcat de la *B* spre *C* cu viteza inițială v și cu accelerația *a*, timpul său de mișcare de la *B* la *C* este $\tau_{21} = \tau_{12} = \dfrac{6\mathrm{v}}{a}$.	0,5p	
	În *C* șalupa 2 are viteza față de apă $\mathrm{v}_2 = a\tau_{21} = 6\mathrm{v}$	0,5p	
	La întoarcere ea pornește cu viteza (față de maluri) $\mathrm{v}_2^{'} = \mathrm{v}_2 - \mathrm{v} = 5\mathrm{v}$.	0,5p	
	Timpul de mers din *C* în *B* este $\tau_{22} = \dfrac{D}{\mathrm{v}_2^{'}} = \dfrac{24\mathrm{v}}{5a} = 4{,}8\dfrac{\mathrm{v}}{a}$.	0,5p	
	A doua șalupă se întoarce în *B* după timpul total $t_2 = \tau_{21} + \tau_{22} = 10{,}8\dfrac{\mathrm{v}}{a}$.	0,5p	
Total subiectul I			**30**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Barem Subiectul II. – *Mișcări relative*		Parțial	Punctaj
a.	Reprezentarea grafică a forțelor și accelerațiilor(fig. 2 a)	1 p	**8 p**
	Pentru platforma A: $\vec{N}+\vec{G}=m\left(\vec{a}+\vec{a_r}\right)$	0,5 p	
	Ox: $mg\sin\alpha = m\left(a_r - a\cos\alpha\right) \Rightarrow a_r = a\cos\alpha + g\sin\alpha$ (1)	1,5 p	
	Oy: $N - mg\cos\alpha = -ma\sin\alpha$ (2)	1,5 p	
	Pentru platforma B: $\vec{N'}+\vec{N''}+\vec{G'}=M\vec{a}$	1 p	
	Ox': $N\sin\alpha = Ma$ (3)	1 p	
	$\xrightarrow{(2,3)} a = \dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ (4)	1,5 p	
b.	$\xrightarrow{(1,4)} a_r = \dfrac{(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ (5)	1,5 p	**4 p**
	$a_{abs}^2 = a^2 + a_r^2 - 2aa_r\cos\alpha \xrightarrow{(4,5)}$	1,5 p	
	$a_{abs} = \dfrac{\sqrt{(M+m)^2\sin^2\alpha + M^2\cos^2\alpha}}{M+m\sin^2\alpha}.g\sin\alpha$	1 p	
c.	Reprezentarea grafică a forțelor și accelerațiilor (fig. 2 b)	1 p	**8 p**
	Pentru Andrei: $\vec{N_1}+\vec{F_s}+\vec{G_0}=m_0.\left(\vec{a}+\vec{a_r}\right)$	0,5 p	
	Ox: $F_s = m_0(a_r\cos\alpha - a)$ (6)	1,5 p	
	Oy: $N_1 - m_0 g = -m_0 a_r\sin\alpha$ (7)	1,5 p	
	$\xrightarrow{(4,5,6)} N_1 = \dfrac{m_0 Mg\cos^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$, (8)	1,5 p	
	Dar $N_1 = m_1 g$	1 p	
	Prin urmare: $m_1 = \dfrac{m_0 M\cos^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ (9)	1 p	
d.	$\xrightarrow{(4,5,7)} F_s = \dfrac{Mm_0 g\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ (10)	2 p	**4 p**
	Condiția de nealunecare: $F_s < \mu N_1$ (11)	1 p	
	$\xrightarrow{(8,10,11)} \mu > tg\alpha$	1 p	
e.	Din (5) găsim: $a_r = g\sin\alpha\dfrac{1+m/M}{1+m/M\sin^2\alpha}$	2 p	**6 p**
	Iar din(9) rezultă: $m_1 = \dfrac{m_0\cos^2\alpha}{1+m/M\sin^2\alpha}$	2 p	
	Eliminăm raportul m/M și obținem: $\sin\alpha = \dfrac{g}{a_r}\left(1-\dfrac{m_1}{m_0}\right)$	2 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Total subiectul II		**30**

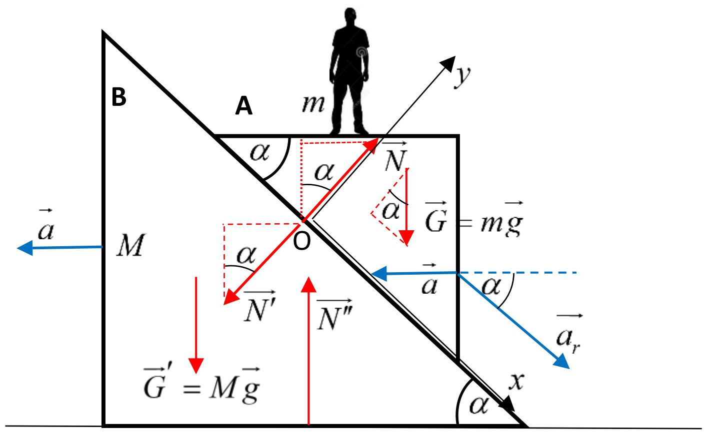


Fig. 2 a

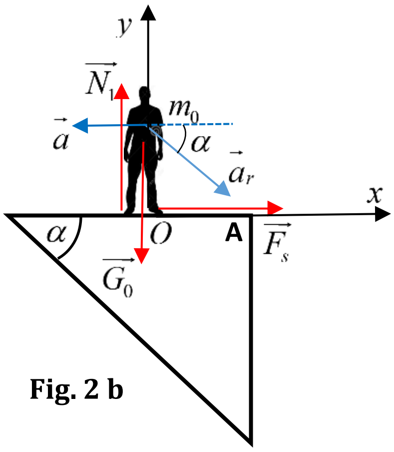


Fig. 2 b

Barem Subiectul III – ***Măsurători cu un smartphone***		**Parțial**	**Punctaj**
a1)	- reprezentarea forțelor: greutate, reacțiune normală, tracțiune (reacțiunea forței de frecare exercitată asupra foii datorită mișcării smartphone-ului). Fie *x* lungimea smartphone-ului care se află în contact cu foaia la un moment dat. $N=\frac{m_s\cdot g}{L}\cdot x\Rightarrow F_{fs}=\mu_{sf}\frac{m_s\cdot g}{L}\cdot x$; $F_{fs_{medie}}=\mu_{sf}\frac{m_s\cdot g}{2}=m_s\cdot a$ $\mu_{sf}=\frac{2\cdot a}{g}\cong 0,61$	1p 1p 2p 1p	**5p**
a2)	- reprezentarea forțelor: greutate, reacțiune normală a foii N_1, reacțiune normală a suprafeței orizontale N_2, tracțiune (reacțiunea forței de frecare exercitată asupra foii datorită mișcării smartphone-ului), forța de frecare datorită mișcării smartphone-ului pe suprafața orizontală. $F_{f1}-F_{f2}=m_s\cdot a$ $F_{f1}=\mu_1\cdot N_1=\mu_1\cdot\frac{x}{L}\cdot m_s\cdot g$ (forța de frecare dintre smartphone și foaie care devine forță de tracțiune pentru smartphone) $F_{f2}=\mu_2\cdot N_2=\mu_2\cdot\frac{L-x}{L}\cdot m_s\cdot g$ (forța de frecare dintre smartphone și suprafața orizontală) $a(x)=\frac{F_{f1}-F_{f2}}{m_s}=g\cdot[\mu_1\cdot\frac{x}{L}-\mu_2\cdot\frac{L-x}{L}]$ $a=g\frac{\mu_1-\mu_2}{2}\Rightarrow\mu_1-\mu_2\cong 0,61$ (accelerația depinde liniar de *x*) $a'=-\mu_2\cdot g$ $d=\frac{\mu_2\cdot g}{2}\cdot t^2$ rezultă $\mu_2\cong 0,04$ $\mu_1\cong 0,61+\mu_2\cong 0,65$	3p 1p 2p 2p 2p 1p 1p 1p 1p 1p	**15p**
b1)	$\vec{a}=\left.\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right\|_{\Delta t\to 0}$ Cum $\vec{\omega}$ este constant rezultă că $\vec{a}$ este accelerația centripetă $\vec{a}=-\omega^2\cdot\vec{r}$	1p 2p	**3p**
b2)	$\vec{a}=-\omega^2\cdot\vec{r}=-(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)\cdot\vec{r}$ $\omega_x=\omega_y=0$ rezultă	1p 1p	**5p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$\vec{a}=-(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)\cdot(\vec{r}_x+\vec{r}_y+\vec{r}_z)=-\omega_z^2\cdot\vec{r}_x-\omega_z^2\cdot\vec{r}_y-\omega_z^2\cdot\vec{r}_z$ $a_x=-\omega_z^2\cdot r_x;\ a_y=-\omega_z^2\cdot r_y;\ a_z=-\omega_z^2\cdot r_z$	2p 1p	
b3)	$r_x=-\dfrac{a_x}{\omega_z^2}=\dfrac{1,44}{36}=4\,\text{cm}$ $r_y=-\dfrac{a_y}{\omega_z^2}=\dfrac{2}{36}\cong 5,6\,\text{cm}$	1p 1p	**2p**
Total subiectul III			**30p**

Oficiu		**10**

Barem propus de:
***Prof. Florin MĂCEȘANU**, Școala Gimnazială „Ștefan cel Mare”, Alexandria*
***Prof. Cristian MIU,** Colegiul Național „Ion Minulescu”, Slatina*
***Prof. Victor STOICA,** Inspectoratul Școlar al Municipiului București*
***Prof. Tiberiu MAN,** Colegiul Național „Grigore Moisil”, Urziceni*

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.